

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по научной работе  
Федерального государственного  
бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования  
«Челябинский государственный университет»  
доктор физико-математических наук,  
профессор



В.Д. Бучельников

«26» января 2017 г.

### ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертацию Савастеева Дениса Владимировича  
«Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений  
на стратифицированных множествах»,  
представленную на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и  
оптимальное управление.

**Актуальность темы исследования.** Работа Д.В. Савастеева посвящена изучению избранных качественных свойств дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа на стратифицированных множествах. Задачи с такими уравнениями возникают при изучении различных процессов в гетерогенных средах, ячеистых структурах, в областях с перегородками. Такие задачи рассматриваются в работах, например, G. Lumer, S. Nicaise, А.И. Назарова, Ю.В. Покорного, О.М. Пенкина. При этом качественная теория таких уравнений на данный момент развита сравнительно слабо. Некоторые аналоги классических теорем теории эллиптических уравнений второго порядка либо отсутствуют, либо доказаны при сильных ограничениях на размерность стратифицированного множества. Поэтому актуальность темы исследования не вызывает сомнений.

15 / 1 Верашина

Заметим, что сложная структура стратифицированных множеств значительно усложняет изучение дифференциальных уравнений на них. Многие классические методы доказательств оказываются неприменимы на стратифицированных множествах. Из-за этого аналоги классических теорем доказываются совершенно новыми способами. Автор использует методику, развитую его научным руководителем О.М. Пенкиным. Все дифференциальные соотношения на стратифицированном множестве рассматриваются как единое уравнение, а операции дифференцирования выполняются по специальной стратифицированной мере. Ранее такой подход был успешно применён при изучении дифференциальных уравнений на геометрических графах, которые формально можно считать одномерным случаем стратифицированных множеств.

**Содержание работы.** Перейдём к обзору содержания диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, содержащих 20 параграфов, и списка литературы из 39 наименований.

В первой главе приводятся основные понятия и вспомогательные теоремы теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах.

Во второй главе получен сильный принцип максимума для недивергентного эллиптического оператора и параболического оператора на стратифицированном множестве. Здесь же доказывается лемма о нормальной производной, которая играет ключевую роль при доказательстве сильного принципа максимума. Заметим, что в работе была преодолена основная трудность доказательства – построение соответствующей барьерной функции.

В третьей главе получен аналог неравенства Харнака для мягкого лапласиана на стратифицированном множестве. Его формулировка оказывается такой же, как в классическом случае. При этом метод доказательства существенно отличается от классического, так как использование теоремы о среднем (в том виде, как это делается в классическом доказательстве) на стратифицированном множестве наталкивается на непреодолимые препятствия.

В четвёртой главе доказывается теорема об устранимой особенности для гармонической функции на стратифицированном множестве. А именно, показывается, что при некоторых ограничениях на стратифицированное множество любую ограниченную гармоническую функцию, определённую только на стратах размерности  $n$  и  $n-1$  (где  $n$  – максимальная размерность стратов), можно продолжить на всё стратифицированное множество. Т. е. страты размерности  $k < n-1$  образуют устранимое множество относительно мягкого лапласиана.

Доказанные в диссертации теоремы значительно упрощают дальнейшее изучение эллиптических операторов на стратифицированных множествах. Сильный принцип максимума обеспечивает единственность классического



решения задачи Дирихле для соответствующего оператора. Особую важность несёт и теорема об устранимой особенности. Она позволяет реализовать метод Пуанкаре – Перрона, с помощью которого можно доказать классическую разрешимость задачи Дирихле для мягкого лапласиана на стратифицированном множестве. Ранее это было доказано только для двумерного случая (S. Nicaise, О.М. Пенкин, А.А. Гаврилов) как раз по причине отсутствия теоремы об устранимой особенности.

**Замечания.** К диссертации имеется ряд замечаний.

1. В третьей и четвёртой главе все результаты рассматриваются для мягкого лапласиана с коэффициентом  $p$ , равным единице на стратах старшей размерности и нулю на остальных. Нет объяснения, почему не рассматривается более общий случай, когда функция  $p$  равна некоторой положительной константе на каждом страте старшей размерности и нулю на остальных.

2. Теорема 3.1 доказывается при условии усиленно прочного стратифицированного множества. Нет комментария о том, насколько существенно это условие и как поведёт себя теорема при его отсутствии.

3. На стр. 68 при описании функциональных пространств говорится, что «первое пространство допускает особенности градиента в некоторых точках  $\Omega_0$ ». Было бы уместней уточнить, что особенность градиента может быть только в точках стратов размерности  $k < n-1$ , как это следует из определения пространства.

Указанные замечания не влияют на положительную оценку диссертации в целом.

**Заключение.** Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и обоснованы с требуемой степенью научной полноты. Они математически грамотно сформулированы в виде теорем, к которым даются строгие доказательства. Основные результаты своевременно опубликованы. По теме диссертации имеется 8 публикаций, из них 4 статьи из списка журналов, рекомендованных ВАК. Результаты исследований докладывались на международных конференциях и научных семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты имеют большую значимость для теории дифференциальных уравнений. Они могут в дальнейшем применяться в научных исследованиях в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Воронежском государственном университете.

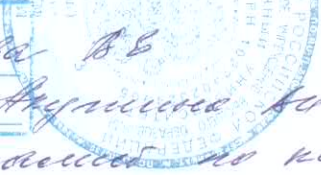
Диссертация удовлетворяет всем требованиям Положения о порядке присуждения учёных степеней, предъявляемым к диссертациям на соискание

учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а её автор – Савастеев Денис Владимирович, заслуживает присуждения ему указанной степени.

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук, профессором В.Е. Федоровым. Диссертация и отзыв обсуждены и отзыв утверждён на заседании кафедры математического анализа Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет» «20» января 2017 г. (протокол № 6).

Заведующий кафедрой математического анализа  
ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Фёдоров Владимир Евгеньевич

  
Подпись: *Федорова В.Е.*  
Секретарь: *Андреева А.И.*  
*специалист по кадрам*

Сведения о ведущей организации:

*Полное наименование:* Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет»

*Сокращённое наименование:* ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

*Адрес:* 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, д. 129

*Факс:* (351) 742-09-25

*Адрес в сети Интернет:* [www.csu.ru](http://www.csu.ru)

*Адрес электронной почты:* [odou@csu.ru](mailto:odou@csu.ru)